

Relazione di Laboratorio

Alberto Giudici

15 giugno 2012

Indice

Aritmetica floating point	3
Scheda 3	3
Es 7 - Approssimazione del numero di Nepero	4
Scheda 4	5
Scheda 5 - parte 1	5
Scheda 5 - parte 2	7
Scheda 6	11
Scheda 7	11
Scheda 8	13
Scheda 9 - parte 1	15
Scheda 9 - parte 2	17
Scheda 10	19
Scheda 11	20
Scheda 12	21
Scheda 13	21

Aritmetica floating point

Es 1

$$\mathcal{F} = \{\pm 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 10^p; 1 \leq \alpha_1 \leq 9; 0 \leq \alpha_i \leq 9; i = 2, 3; -12 \leq p \leq 12\} \cup \{0\}$$

- Richiedo che lo spacing sia 1: $10^{p+1-3} = 1 \Rightarrow p = 2$, l'intervallo ricercato é $[0.100e^2, 0.999e^2]$.
- Sapendo che lo spacing aumento di un fattore 10 ad ogni incremento dell'esponente, scelgo l'intervallo $[0.100e^3, 0.999e^3]$ dove gli interi non sono consecutivi.
- Con calcoli analoghi ai precedenti si ottiene: segmento con spacing 10^9 , $[0.100e^{11}, 0.999e^{11}]$; segmento con spacing 10^{10} , $[0.100e^{12}, 0.999e^{12}]$. Entrambi sono segmenti in \mathcal{F} .
- Affinché $1 + 10^k \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$, $10^k < 0.500 \cdot 10^{-3}$ così che il risultato approssimato sia ancora 1. Si ottiene $k < \log_{10} 5 - 3 \cong -2.31$ che é negativo! Non é possibile trovare un $k > 0$.
- $427 \in \mathcal{F}, 628 \in \mathcal{F}, 0.427e^3 + 0.628e^3 = 1.055e^3 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.106e^4$.
- $427.3 \notin \mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.427e^3, 628.7 \notin \mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.629e^3, 0.427e^3 + 0.629e^3 = 1.056e^3 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.106e^4$.

Es 2

$$\mathcal{F} = \{\pm 0.\alpha_1\alpha_2 10^2; 1 \leq \alpha_1 \leq 9; 0 \leq \alpha_2 \leq 9; -12 \leq 2 \leq 12\} \cup \{0\}$$

- $(x + y) + z \neq x + (y + z)$:
 $x + y = 0.123e^0 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.12e^0$, $(x + y) + z = 0.134e^0 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.13e^0$
 $y + z = 0.27e^{-1} \in \mathcal{F}$, $x + (y + z) = 0.137e^0 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.14e^0$, infatti $(x + y) + z = 0.13e^0$ e $x + (y + z) = 0.14e^0$.
- $(xy)z \neq x(yz)$:
 $xy = 0.341e^1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.34e^1$, $(xy)z = 0.85e^1 \in \mathcal{F}$
 $yz = 0.775e^1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.78e^1$, $x(yz) = 0.858e^1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.86e^1$ (rounding-to-even), infatti $(xy)z = 0.85e^1$ e $x(yz) = 0.86e^1$.
- $xy = zy$ e $y \neq 0 \nRightarrow x = z$:
 $xy = 0.1173e^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.12e^2$, $yz = 0.1144e^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.12e^2$, infatti $x = 0.51e^1$ e $z = 0.52e^1$.
- $x(y + z) \neq xy + xz$:
 $y + z = 0.47e^1 \in \mathcal{F}$, $x(y + z) = 0.517e^1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.52e^1$
 $xy = 0.253e^1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.25e^1$, $xz = 0.264e^1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.26e^1$,
 $xy + xz = 0.51e^1 \in \mathcal{F}$, infatti $x(y + z) = 0.52e^1$ e $xy + xz = 0.51e^1$.
- $x(\frac{y}{x}) \neq x$:
 $\frac{y}{x} = 0.1142 \dots e^1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0.11e^1$, $x(\frac{y}{x}) = 0.77 \dots e^1 \in \mathcal{F}$, infatti $x(\frac{y}{x}) = 0.77e^1$ e $x = 0.70e^1$.

Scheda 3

Es 3

$x = 0.1234567e^0, y = 0.6666325e^{+4}, z = -0.6666325e^{+4}$, calcolare $(x + y) + z$ e $x + (y + z)$:
 $(x + y) + z = 0.1230000e^0$ mentre $x + (y + z) = 0.1234567e^0$. Il risultato dell'ultima operazione é esatto poiché $z = -y$, mentre il primo é affetto da un errore relativo $\mathcal{E}_r = 3.7\%$.

Es 4

Conviene procedere sommando prima i termini minori tra di loro e poi sommare 1, così facendo si elimina il rischio di trascurare i contributi dei termini più piccoli a causa di arrotondamenti. Infatti: $((1 + 0.1e^{-15}) + 0.1e^{-15}) + \dots + 0.1e^{-15} = 1.0000000000000000e + 000$ mentre $((0.1e^{-15} + 0.1e^{-15}) + 0.1e^{-15}) + \dots + 1 = 1.0000000000000009e + 000$.

Es 5

$(a+b)+c = -9.400000000000000e-001$

$(a+c)+b = -1$

$a+(b+c) = -1$

Il primo risultato è corretto, gli altri due danno un risultato di -1, che coincide con la somma $(a+b)$, perchè il contributo di c agli altri due numeri viene perso nell'arrotondamento.

$(a+b)+c = 5.413712580022434e-004$

$(a+c)+b = 5.413712580022434e-004$

$a+(b+c) = 5.413712579995743e-004$

In aritmetica esatta il risultato di $(b+c)$ è $5.18e^{-4}$, questa somma viene rappresentata in MATLAB come $5.179999999995744e^{-004}$. Segue il diverso risultato. Perché compaiono tutte queste cifre?? Visto il numero di decimali e le operazioni.? O 0?

Es 6

Nel calcolo delle radici del polinomio $ax^2 + bx + c$ si possono verificare problemi di cancellazione numerica se si utilizza la formula risolutiva $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (ad es. se il prodotto $ac \cong 0$). Questo problema può essere aggirato calcolando la seconda radice da $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, dove x_1 è stata ricavata dalla formula precedente (effettuando solo l'operazione non a rischio).

Es 7 - Approssimazione del numero di Nepero

Approssimare il numero di Nepero con il limite della successione $(1 + \frac{1}{n})^n$. Calcolo dell'errore algoritmico commesso:

$$E_{alg} < u \left(1 + n + \frac{n}{n+1} \right)$$

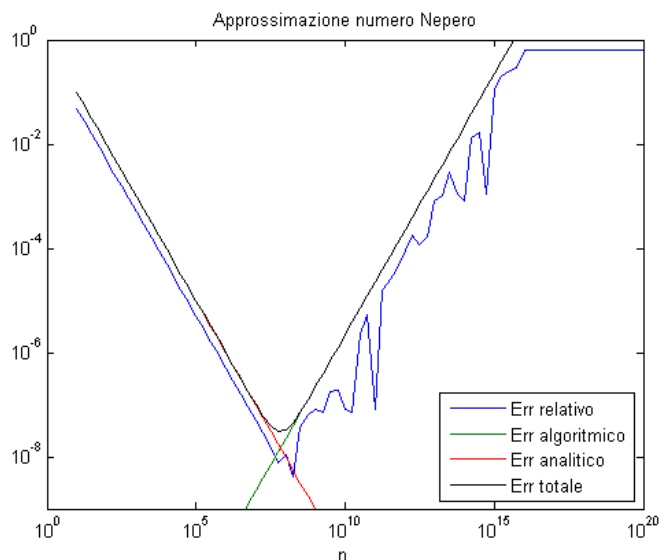
$$E_{an} < \frac{1}{en} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$E_{tot} = E_{an} + E_{alg}$$

Per la stima dell'errore relativo analitico si è proceduto come segue (cfr Soardi, Analisi Matematica, pag 102)

$$E_n = e - e_n < e_n^* - e_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$e_n^* = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{(n+1)}, \lim_n e_n^* = e^+$$



Es 8

Scheda 4

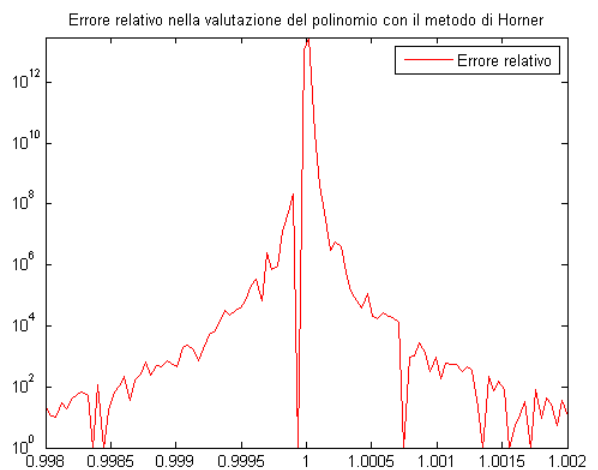
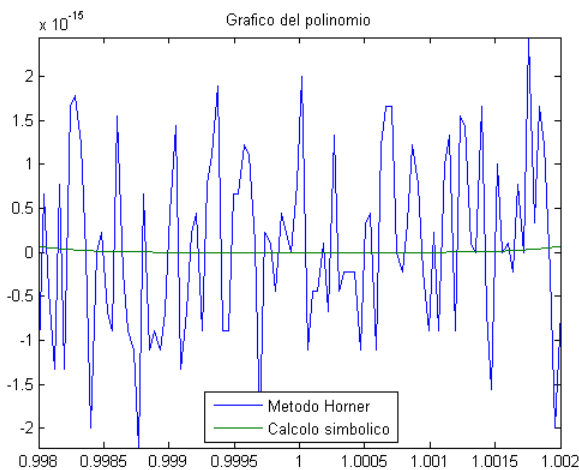
Es 4 - interpretazione geometrica

Nel primo sistema, il coefficiente angolare delle due rette è molto vicino, queste sono quasi parallele: $m_1 = -0.6$ e $m_2 \cong -0.6007984 \dots$. Nel secondo le due rette non sono parallele.

Esercizio - Regola di Horner

Calcolare il polinomio $p(x) = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$ in 100 punti nell'intervallo $[0.9981.002]$ e visualizzare il risultato su grafico. Fattorizzare il polinomio $p(x)$ e calcolarlo usando la sua espressione ottenuta. Confrontare i risultati ottenuti.

Il polinomio $p(x)$ si fattorizza in $p(x) = (x - 1)^6$. I calcoli svolti utilizzando il polinomio fattorizzato portano ad una notevole riduzione dell'errore. Solo errore algoritmico, dovuto alle operazioni in aritmetica Floating Point.



L'errore aumenta notevolmente in prossimità di $x = 1$ poiché il valore esatto si approssima a zero. Scala logaritmica per l'asse y.

Scheda 5 - parte 1

- Indice di condizionamento: $k(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

Es 1,3

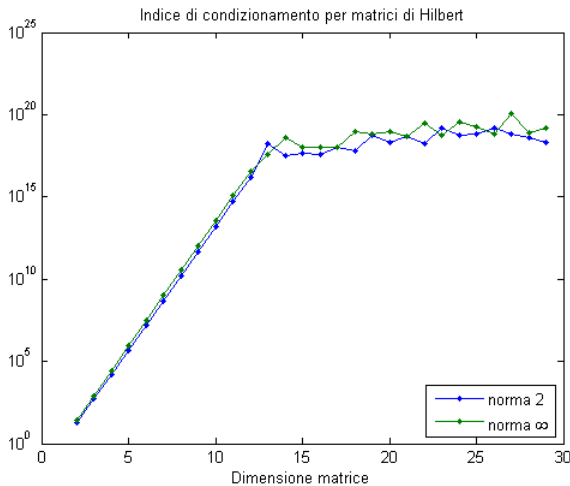
Una matrice di Hilbert è una matrice quadrata della forma $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$. Per questa classe di matrici l'indice di condizionamento cresce esponenzialmente con l'aumentare della dimensione.

Il tempo di calcolo dell'indice di condizionamento con comandi *cond* e *condest* aumenta per entrambi al crescere della dimensione della matrice. Si nota, d'altraparte, che *condest* diventa più veloce di *cond* da una certa dimensione in poi (*condest* da una stima dell'indice di condizionamento, non ne viene effettuato il calcolo esplicito).

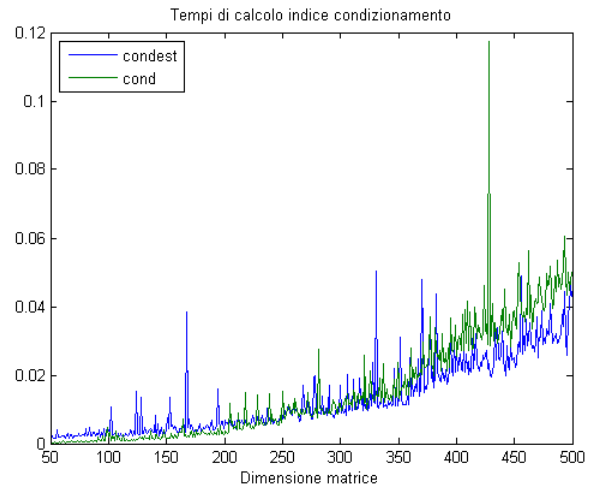
Es 2

Matrici di Vandermonde per i vettori v1, v2.

v1 = 2 3 4 Indice condizionamento: 251.0309



Scala logaritmica per l'asse y.

Il calcolo è effettuato su matrici *random*.

v2 = 2 2.05 4 Indice condizionamento: 2575.906

Cosa si osserva?

La matrice inversa è moltiplicata per il determinante della matrice originaria. Più gli elementi di v si avvicinano tra di loro, più il determinante delle matrici di Vandermonde tende a 0 ($\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (v_j - v_i)$). Nel calcolo della norma della matrice inversa il reciproco del determinante moltiplica l'indice di condizionamento, quando il suo valore diminuisce quello dell'indice di condizionamento aumenta.

Es 4

Errore nella risoluzione di un sistema lineare & indice di condizionamento.

Errore previsto dall'analisi a posteriori : $\epsilon_r \leq k(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$ con $r = b - A\tilde{x}$

Errore calcolato in norma infinito : $\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$

Errore in aumento con con matrici mal condizionate (indice di condizionamento in crescita con l'aumento della dimensione della matrice di Hilbert).

Dimensione	Errori previsti	Errori calcolati
7	eR7Prev < 8.4369e-008	eR7 = 2.3465e-008
12	eR12Prev < 5.3157	eR12 = 2.7027e-001
17	eR15Prev < 130.5691	eR15 = 9.6575e+000

Es 5

Soluzioni approssimate: $x^* = [2, 0]^T$ e $y^* = [-1001, 1000]^T$. Soluzioni esatte: $x = [2, 2]^T$ e $y = [1000, -1000]^T$.

I residui sono $r_x = b - Ax^* = [0.001, 0]^T$ e $r_y = [1, 1]^T$. Errori relativi: $\mathcal{E}_x = \frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \cong 0.707$, $\mathcal{E}_y \cong 2$

Innanzitutto si nota che $k(A) \cong 4e^3$. Si ha che $\mathcal{E}_r \leq k(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$. In questo caso $\mathcal{E}_x \leq 1.4145 \dots$ e $\mathcal{E}_y \leq 5659.6 \dots$. Dato che l'indice di condizionamento è elevato, la grandezza della norma del residuo diventa determinante per la maggiorazione dell'errore relativo (cfr. esercizio seguente).

Es 6

Il residuo calcolato è $r_x \cong [5.1e - 003, 0]^T$. L'indice di condizionamento di A è $k(A) \cong 1.25e^5$. Dato che il problema è malcondizionato, la norma del residuo non dà informazioni utili sulla correttezza del risultato.

Scheda 5 - parte 2

Es 1

Il sistema 1 ha soluzione:

x =	x1 =	U =
-77.8000	-77.8000	2.0000 6.0000 0 -2.0000
28.0000	28.0000	0 2.0000 10.0000 5.0000
-8.2000	-8.2000	0 0 -5.0000 -7.5000
7.2000	7.2000	0 0 0 1.5000

Il sistema 2 non ha soluzione.

Rango della matrice A = 1

U =

12	-15
0	0

Il sistema 3 non ha soluzione.

Rango della matrice A = 2

U =

4.0000	5.0000	-1.0000	4.0000
0	0.7500	2.2500	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Relazione tra rango della matrice e numero di elementi non nulli sulla diagonale di U. Per il primo sistema, che ha soluzione, le soluzioni con il comando \ di MATLAB e con la fattorizzazione LU coincidono.

Es 2

A =

5	1	2	1
1	7	3	1
2	3	8	-1
1	1	-1	6

Tutte le sottomatrici sono simmetriche a predominanza diagonale stretta.

A1 =	A2 =
5.0000 1.0000 2.0000 1.0000	6.8000 2.6000 0.8000
1.0000 6.8000 2.6000 0.8000	0 6.2059 -1.7059
2.0000 2.6000 7.2000 -1.4000	0 -1.7059 5.7059
1.0000 0.8000 -1.4000 5.8000	

A3 =

6.2059	-1.7059
0	5.2370

Dato che l'elemento diagonale è di modulo massimo, viene scelto questo come pivot. Non vengono, quindi, scambiate le righe.

Es 3

A1 =

1	2	3	4
2	4	6	8
-1	-2	-3	-1
5	7	0	1

L =

0.2000	0.5000	0	1.0000
0.4000	1.0000	0	0
-0.2000	-0.5000	1.0000	0

| U =

5.0000	7.0000	0	1.0000
0	1.2000	6.0000	7.6000
0	0	0	3.0000

1.0000 0 0 0 | 0 0 0 0
det(A1) = 0 rank(A3) = 3

A2 =
2 -1 0 0 0
-1 2 -1 0 0
0 -1 2 -1 0
0 0 -1 2 -1
0 0 0 -1 2

L = | U =
1.0000 0 0 0 0 | 2.0000 -1.0000 0 0 0
-0.5000 1.0000 0 0 0 | 0 1.5000 -1.0000 0 0
0 -0.6667 1.0000 0 0 | 0 0 1.3333 -1.0000 0
0 0 -0.7500 1.0000 0 | 0 0 0 1.2500 -1.0000
0 0 0 -0.8000 1.0000 | 0 0 0 0 1.2000
det(A2) = 6 rank(A3) = 5

A3 =
0.5000 -1.0000 0 0 0
-1.0000 0.5000 -1.0000 0 0
0 -1.0000 0.5000 -1.0000 0
0 0 -1.0000 0.5000 -1.0000
0 0 0 -1.0000 0.5000

L = | U =
-0.5000 0.7500 0.8750 -0.3125 1.0000 | -1.0000 0.5000 -1.0000 0 0
1.0000 0 0 0 0 | 0 -1.0000 0.5000 -1.0000 0
0 1.0000 0 0 0 | 0 0 -1.0000 0.5000 -1.0000
0 0 1.0000 0 0 | 0 0 0 -1.0000 0.5000
0 0 0 1.0000 0 | 0 0 0 0 1.0313
det(A3) = rank(A3) =
1.0313 5

Es 4

epsisol	sol noPivot	sol Pivot
0.010000000000000000	2.0101010101010175	1.9898989898989896
	2.0101010101010175	1.9898989898989896
0.000100000000000000	2.0001000100000610	1.9998999899990002
	2.0001000100000610	1.9998999899990002
0.000001000000000000	2.0000009999243673	1.9999989999990002
	2.0000009999243673	1.9999989999990002
0.000000010000000000	2.0000000100495186	1.9999999899999998
	2.0000000100495186	1.9999999899999998
0.000000000100000000	2.00000001654807420	1.9999999999000000
	2.00000001654807420	1.9999999999000000
0.000000000000010000	2.0001778011646820	1.9999999999899999
	2.0001778011646820	1.9999999999899999
0.000000000000000100	1.9984014443252818	1.9999999999999902
	1.9984014443252818	1.9999999999999902
0.000000000000000001	4.4408920985006262	1.9999999999999996
	4.4408920985006262	1.9999999999999996
0.000000000000000000	0.0000000000000000	2.0000000000000000

0.0000000000000000

2.0000000000000000

Al tendere di ϵ a zero, la matrice diventa malcondizionata. Fenomeni di eliminazione numerica nel caso di risoluzione senza ricerca del Pivot.

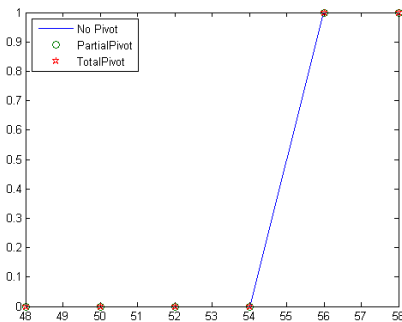
Es 5

La norma Infinito non consente di ottenere differenze apprezzabili tra i risultati a causa della sua definizione.

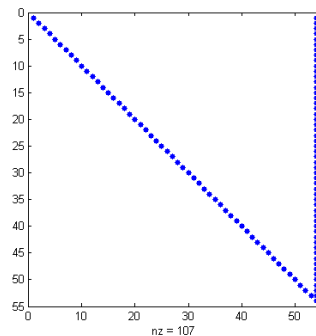
L'n-esima colonna della matrice U ha come elementi $U_{i,n} = 2^{i-1}$

Le matrici U sono uguali per tutti i metodi di eliminazione Gaussiana

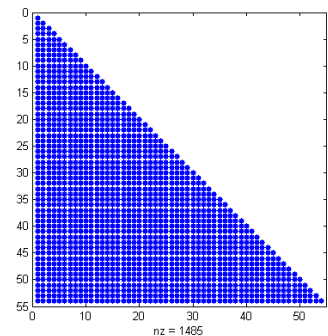
(Scheda 5 - Es 5)



Errore in norma ∞ .



Matrice L.



Matrice U.

Es 6

Lungo la diagonale principale una matrice di Henkel presenta gli elementi:

$$\text{se } 2i - n \leq 0 : H_{ii} = 2^{\frac{1}{2-2i+n}} \text{ altrimenti : } H_{ii} = 2^{2i-n}$$

Per come sono costruite le matrici di Henkel, per le quali gli elementi di modulo maggiore si trovano in basso a destra, la ricerca del pivot da risultati migliori per ricerche più ampie. Inoltre, senza la ricerca del pivot, gli elementi delle righe inferiori aumentano in valore assoluto (l'elemento della diagonale rimane il minimo, in modulo).

L'indice di condizionamento cresce come 2^n , queste matrici sono quelle peggio condizionate.

Es 7

Ho scelto di confrontare le due matrici ottenute valutandone la distanza in norma 2.

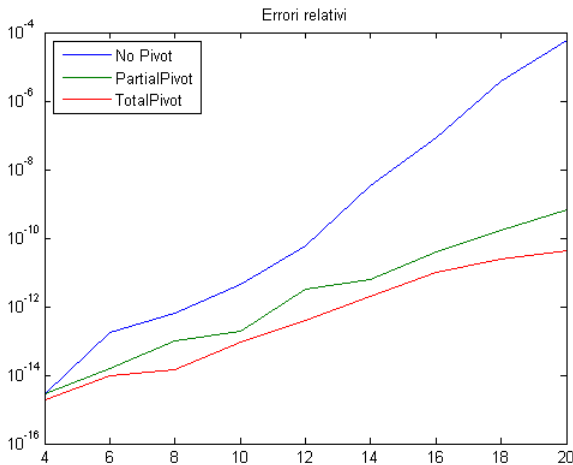
Una distanza di questo ordine (10^{-16}) implica che le cifre diverse negli elementi delle matrici si trovano all'ultima posizione nella mantissa (in questo caso è così, cerco l'elemento massimo della differenza tra le due matrici).

	Distanza	Condizionamento	Determinante
A1	6.340968e-016	8.424997e+001	2.0
A2	2.460153e-016	8.520858e+000	14.0

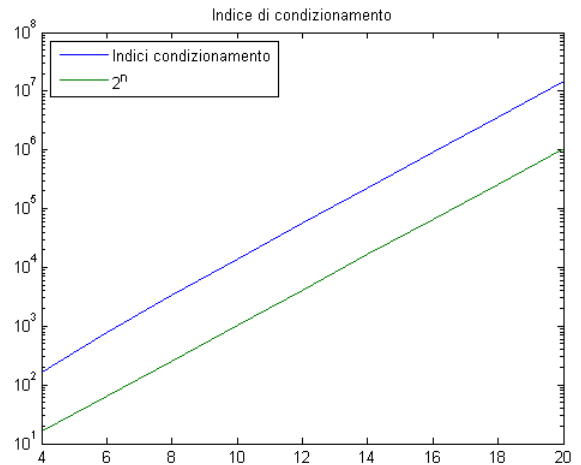
`max(max(abs(A1_-A1inv))) = 5.551115123125783e-016`

`max(max(abs(A2_-A2inv))) = 2.220446049250313e-016`

(dove A1_ e A2_ sono il risultato della funzione inv, mentre A1inv e A2inv sono state ricavate dall'equazione $Ai_{inv} * Ai = Id$).



Scala logaritmica per l'asse y.



Scala logaritmica per l'asse y.

Es 8

Legame tra fattorizzazione LU e di Cholesky per matrici simmetriche definite positive. In questo caso, dato che gli elementi della diagonale di U sono 1, allora U ed R coincidono (altrimenti, $R = D^{\frac{1}{2}}\tilde{U}$ dove $U = D\tilde{U}$, $D = \text{diag}(u_{ii})$).

Uso la funzione *chol* per verificare se la matrice ottenuta è definita positiva, il metodo si interrompe in caso contrario.

Per la matrice B , la matrice A non è definita positiva:

$R =$	1	-1	-1	-1		$L =$	1	0	0	0		$U =$	1	-1	-1	-1
	0	1	-1	-1			-1	1	0	0			0	1	-1	-1
	0	0	1	-1			-1	-1	1	0			0	0	1	-1
	0	0	0	1			-1	-1	-1	1			0	0	0	1

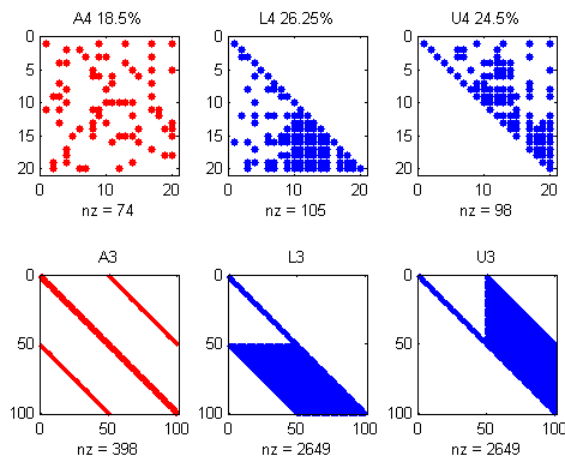
Anche le sottomatrici sono definite positive.

Es 9

Errore nel calcolo della soluzione: $3.845925e^{-16}$.

La soluzione esatta è $x = [111]^T$.

$x =$
 9.9999999999999996e-001
 1.0000000000000000e+000
 9.9999999999999998e-001

**Es 10**

Durante la fattorizzazione LU si aggiunge il multiplo di una riga ad un'altra. Gli elementi che sono zero nella riga j -esima ma non sono nulli nella riga i -esima richiederanno nuovo spazio nella riga j una volta modificata.

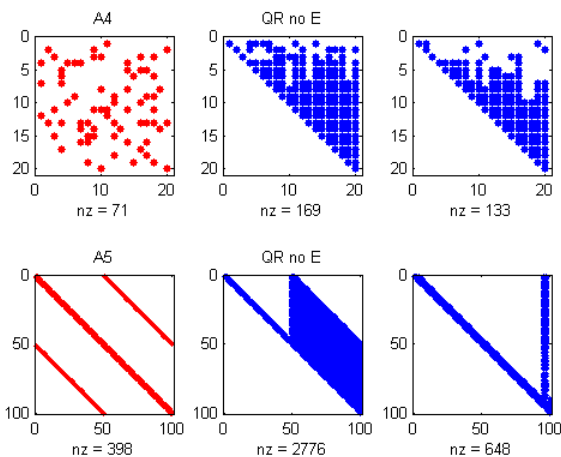
Fill-in per fattorizzazione LU di matrici sparse.

Scheda 6

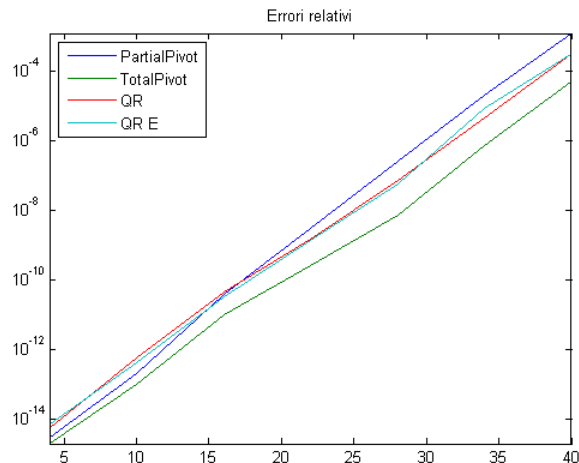
Es 2

Si nota la riduzione del fill-in con il metodo $[Q, R, E] = \text{qr}(A)$.

(Scheda 6 - Es 1)



(Es 2) Fill-in per fattorizzazione QR di matrici sparse.



(Es 3)

Es 3

Per come sono costruite le matrici di Henkel, per le quali gli elementi di modulo maggiore si trovano in basso a destra, la ricerca del pivot dà risultati migliori per ricerche più ampie. Inoltre, senza la ricerca del pivot, gli elementi delle righe inferiori aumentano in valore assoluto (l'elemento della diagonale rimane il minimo, in modulo). La fattorizzazione QR dà risultati migliori quando si effettuano gli scambi per colonne, infatti spostandosi verso destra gli elementi crescono.

Es 4

La matrice A1 è singolare. Per le altre si ottengono i seguenti errori:

Errori relativi

	Pivot parziale	Pivot totale	QR	QR E
A2	4.965068306494546e-017	0	1.570092458683775e-016	9.942541535518371e-016
A3	0	0	2.852214593099840e-016	3.439900227959407e-016

Es 5

Il rango di una matrice è uguale al numero di elementi non nulli della diagonale di U, per la fattorizzazione LU. La tolleranza serve perchè molti elementi non nulli hanno valori prossimi a zero (errori di approssimazione). (Il rango delle matrici è: $rk(A) = 3 = rank(A)$, $rk(B) = 3 = rank(B)$, $rk(C) = 2 = rank(C)$, $rk(D) = 4 \neq rank(D) = 3$, $rk(E) = 11 \neq rank(E) = 3$ con una tolleranza di 4ϵ).

Scheda 7

Es 2

Nota il variare dei raggi spettrali, come da teorema $1 < \rho(P_J) \cong 8.071 < \rho(P_{GS}) \cong 73.5442$ e $\rho(P_{GS}) \cong 0.24386 < \rho(P_J) \cong 0.44896 < 1$

A differenza dei metodi di risoluzione diretti, i metodi iterativi non effettuano alcuno scambio di righe o colonne. Non vengono contemplati criteri per la riduzione dell'errore, d'altro canto i possibili errori computazionali derivano soltanto dal prodotto matrice-vettore. Gli errori di troncamento non verrebbero risolti da manipolazioni delle matrici di iterazione.

Es 3

All'aumento della dimensione corrisponde un aumento dei tempi di esecuzione. Utilizzando delle matrici sparse il tempo di calcolo diminuisce con entrambi i metodi. Il metodo di Gauss-Seidel ha i tempi di calcolo minori rispetto a quelli del metodo di Jacobi.

I tre metodi convergono per le matrici scelte.

Dim	Jacobi Sparse	Jacobi Full	GSeidel Sparse	GSeidel Full
2000	3.9984e-001	2.5882e+000	7.3224e-001	2.8441e+000
4000	1.2967e+000	1.9097e+001	2.3118e+000	1.4500e+001

Es 4

I tempi di calcolo crescono al crescere della dimensione. Sono maggiori per le matrici piene rispetto a quelle sparse.

Dim	Jacobi Sparse	Jacobi Full	\ Sparse	\ Full
1000	5.3436e-001	8.6389e-001	8.0512e-002	2.5131e-001
2000	1.7313e+000	3.4375e+000	5.7160e-004	5.6868e-001
4000	6.1783e+000	2.2598e+001	1.0251e-003	3.4118e+000

Es 5

Jacobi: Raggio spettrale di B 1.118

GSeidel: Raggio spettrale di B 0.5

Jacobi	GSeidel	Esatta
-5.2938e+004	5.5555e-002	5.5556e-002
-6.8509e+004	-7.2222e-001	-7.2222e-001
-1.8683e+004	1.1667e+000	1.1667e+000
#iterJacobi	#iterGSeidel	
100	28	

Jacobi: Raggio spettrale di B 1.081e-005

GSeidel: Raggio spettrale di B 4.8284

Jacobi	GSeidel	Esatta
1.0000e+000	1.8213e+067	1.0000e+000
-5.0000e+000	7.5441e+066	-5.0000e+000
-5.0000e+000	5.1514e+067	-5.0000e+000
#iterJacobi	#iterGSeidel	
5	100	

Jacobi: Raggio spettrale di B 0.39484

GSeidel: Raggio spettrale di B 0.0061728

Jacobi	GSeidel	Esatta
1.8558e+000	1.8558e+000	1.8558e+000
1.1902e+000	1.1902e+000	1.1902e+000
-2.6135e+000	-2.6135e+000	-2.6135e+000
#iterJacobi	#iterGSeidel	
17	6	

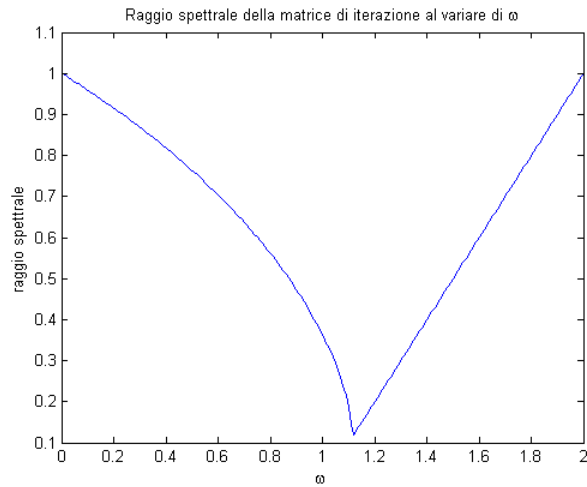
Jacobi: Raggio spettrale di B 0.64113

GSeidel: Raggio spettrale di B 0.7746

Jacobi	GSeidel	Esatta
1.0000e+000	1.0000e+000	1.0000e+000
1.0000e+000	1.0000e+000	1.0000e+000
1.0000e+000	1.0000e+000	1.0000e+000
#iterJacobi	#iterGSeidel	
36	62	

Es 7

Note sul numero di iterazioni necessarie per la convergenza dei tre metodi Jacobi converge più lentamente di Gauss-Seidel, coerentemente con i raggi spettrali delle corrispondenti matrici di iterazione. Nel metodo di rilassamento si nota come ad un raggio spettrale minore corrisponda una maggiore velocità di convergenza. (tasso di asintotico di convergenza $R(P) = -\log_{10}(\rho(P))$, P matrice di iterazione)



Raggi Spettrali al variare di w

w	1.2000e+000	1.4000e+000	1.6000e+000	1.8000e+000	2.0000e+000
rho	2.0000e-001	4.0000e-001	6.0000e-001	8.0000e-001	1.0000e+000
#iter	9	14	23	48	100

Scheda 8

Es 1

Per i grafici di A4 e A5 si notano solo due linee poichè le componenti sono uguali a coppie (una linea copre l'altra).

Forse le oscillazioni nel grafico di A3 sono dovute alla mal separatezza degli autovalori: il fattore che modula le singole componenti, riferite alla base di autovettori, α_i è $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k$ a seconda della componente rispetto all'autovettore i -esimo e al segno della frazione si possono avere fenomeni di oscillazione oppure no.

Per i casi A2 e A3 si nota un aumento del numero di iterazioni, dovuto alla vicinanza tra l'autovalore di modulo max e il successivo.

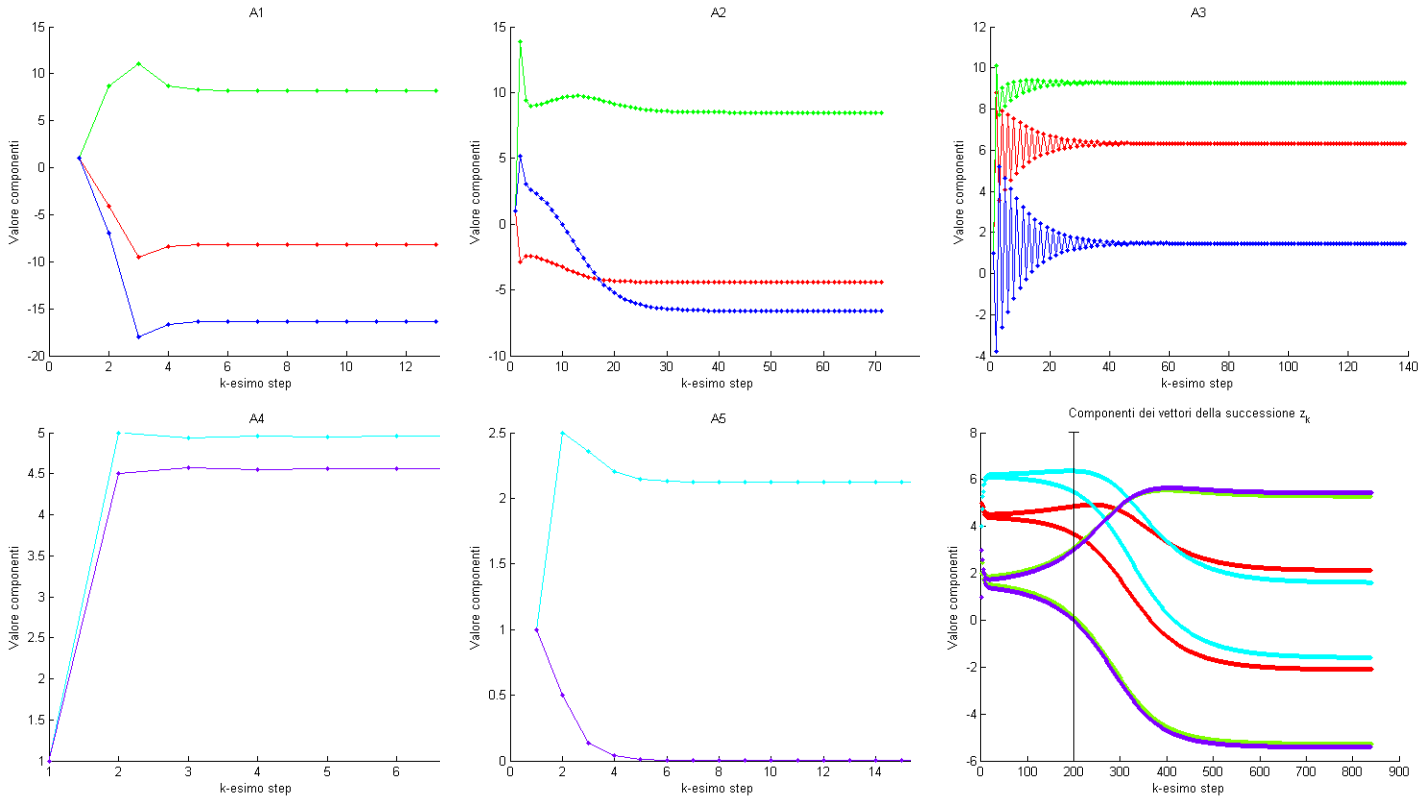
A1 :eig	20	2	4	=> 2.0000e+001	#iter 12
A2 :eig	1	11.618	9.38197	=> 1.1618e+001	#iter 70
A3 :eig	11.3192	-1.184	-10.13	=> 1.1319e+001	#iter 138
A4 :eig	-2.7016	-2.5208	3.7016	9.5208 => 9.5208e+000	#iter 6
A5 :eig	1	3	3	3 => 3.0000e+000	#iter 15

Es 2

Vettore di innesco con $\alpha_1 = 0$

Il metodo non converge in 200 iterazioni poichè il vettore di innesco ha componente relativa all'autovettore dominante nulla. Con un numero maggiore di iterazioni, gli errori introdotti rendono $\alpha_1 \neq 0$: il metodo converge. Cambiando il vettore di innesco si risolve il problema ed il metodo converge entro maxIter.

(Scheda 8 - Es 1,2) In ogni grafico ad una linea corrisponde una componente del vettore.



(Es 2) Vettore di innesco con $\alpha_1 = 0$

```
[b1,autoVettore,k] = metodoPIShift(B1,x00,-6,toll,maxIter)
b1 = -8.028578783721786e+000    #iter = 14
autoVettore =
    -2.637251046182561e-001
    -6.588023488317172e-001
     1.997327181441641e-001
     6.756740158320773e-001
B1 innesco [1 1 1 1] 200 iterazioniMax :eig || -8.0286    -1.5732    5.6689    7.9329
eigFound: 6.6574    #iter 200
B1 innesco [1 1 1 1] 1500 iterazioniMax
eigFound: -8.0285    #iter 839
B1 innesco [1 -3 1 2] 200 iterazioniMax
eigFound: -8.0134    #iter 200
```

Autovalori dominanti opposti.

La matrice B2 ha due autovalori opposti come autovalori dominanti. Il metodo delle potenze non converge. Se questo venisse applicato a B^2 e si estraesse la radice dell'autovalore dominante trovato si ha il risultato (se la matrice A ha due autovalori (λ_1 e $-\lambda_1$) allora la matrice A^2 ha, in corrispondenza, λ_1^2 che sarà unico e dominante. Il metodo delle potenze ritornerà questo. Estratta la radice e preso quello positivo si trova l'autovalore dominante per A.

```
B2 :eig || 4    -2    -4
    eigFound: 2.2608    #iter 200
(B2)^2 :eig || 4 16 16
    eigFound: 4.0000    #iter 14
```

Innesto della successione z_k su di un autovettore.

In questo caso un elemento della successione z_k ha per valore $v = (0.5 \ 0.5 \ 0.5)$ che è un autovettore associato all'autovalore 1. Quindi si ottengono due coefficienti di Rayleigh coincidenti che portano l'errore a zero. ($Av = v$)

Inoltre: la matrice ha come autovalori dominanti due autovalori opposti, vedi sopra.

```
B3 :eig || -12          12          3          1
      eigFound: 1      #iter 2
Zk  z_0  z_1  z_2
    1    0.5  0.5
    1    0.5  0.5
    1    0.5  0.5
    1    0.5  0.5
```

Note: perchè il test d'arresto sull'errore assoluto sia utile si suppone che la successione σ_k sia monotona decrescente in senso stretto.

Es 3

Per $\mu = 12$, il metodo impiega più iterazioni degli altri perchè 12 si trova tra due autovalori non ben separati. Convergenza più rapida con l'avvicinarsi di μ all'autovalore 14.

```
Autovalori di A: 0.512085      14.1026      10.3854
Param Shift = 12.000000 ; autovalore = 10.385360 ; #iter = 60
Param Shift = 13.000000 ; autovalore = 14.102556 ; #iter = 17
Param Shift = 14.000000 ; autovalore = 14.102556 ; #iter = 7
Param Shift = 15.000000 ; autovalore = 14.102556 ; #iter = 10
Metodo Potenze; autovalore = 14.102554 ; #iter = 43
```

Es 4

Gli autovalori dominanti per le matrici $(A - \mu I)^{-1}$ sono opposti.

```
Autovalori di A: 3          1          2
Autovalori di (A-muI)^-1
      2.0000000000000275e+000  -6.666666666666795e-001  -2.0000000000000233e+000
Param Shift = 2.500000 ; autovalore = 2.573082 ; #iter = 200
```

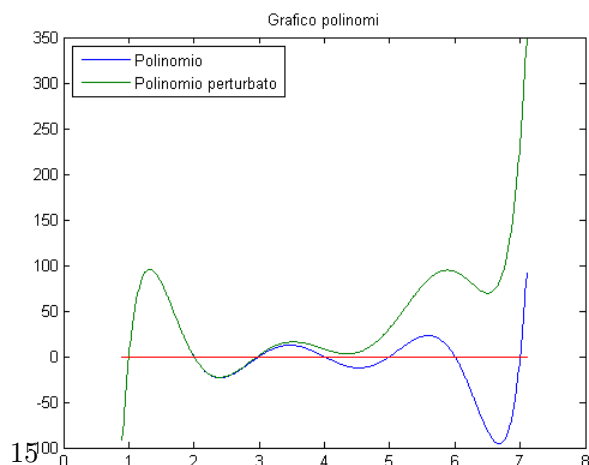
```
Autovalori di (A-muI)^-1
      -2.000000000000052e+000  6.6666666666673055e-001  1.999999999999490e+000
Param Shift = 1.500000 ; autovalore = 0.251495 ; #iter = 200
```

Scheda 9 - parte 1

Es 1

Ha senso considerare l'errore relativo nelle radici quando confronto radici complesse del pol perturbato e reali del pol originario?? Non sono zeri di funzione. (posso pensare ad un errore del 100% dove ho perso delle radici).

La perturbazione porta ad una diminuzione del numero di zeri.



Radici	
polinomio	polinomio perturbato
7.000000000000703e+000	6.644428959584060e+000 +3.907692289827950e-001i
5.99999999997170e+000	6.644428959584060e+000 -3.907692289827950e-001i
5.00000000004296e+000	4.368166209320691e+000 +2.244381249933771e-001i
3.99999999996843e+000	4.368166209320691e+000 -2.244381249933771e-001i
3.00000000001224e+000	2.971740865485022e+000
1.9999999999756e+000	2.001071574418111e+000
1.00000000000016e+000	9.999972222873942e-001
errore Relativo Radici	
7.547554747997910e-002	errore Relativo coeff Perturbato
1.256084385738502e-001	7.142857142857143e-005
1.341024102690752e-001	
1.077957645384108e-001	
* 9.419711505396966e-003 *	
* 5.357872091775282e-004 *	
* 2.777712621360130e-006 *	

Es 2

...vedere figura...

Es 3

Per $x_0 = 1.4$ il metodo di Newton diverge. Il valore $x_0 = 1.4$ (ca 1.3918) sembra fare da spartiacque tra la convergenza e non convergenza del metodo di Newton. Tenuto conto della disparità di f (quindi, df pari) e del valore della derivata in x_0 , i coefficienti angolari ai passi successivi diminuiscono allontanando i valori dell'iterata dallo zero.

Es 4

La radice $x=1$ è una radice multipla: il numero di iterazioni necessarie per la convergenza di Newton è 12 (tra l'altro arresto, con un errore elevato), se si effettua la correzione $x^{(k+1)} = x^{(k)} - 10 * \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$ allora si nota che il metodo converge in 2 passi (alla soluzione esatta).

Es 5, 6

Vedere il codice per Es 5; vedere il grafico per Es 6.

Es 7

La convergenza dipende anche dalla scelta del punto iniziale x_0 . $\phi'(x) < 1$ per $(c > 0) \frac{-1}{c} < x < 0$ ($c < 0$) $0 < x < \frac{-1}{c}$ Bisogna, quindi scegliere valori iniziali in un opportuno intorno di $\sqrt{5}$ Per valori positivi di c non è assicurata la convergenza, perchè in un intorno di $\sqrt{5}$ $\phi' > 1(x)$ (la funzione non è una contrazione!).

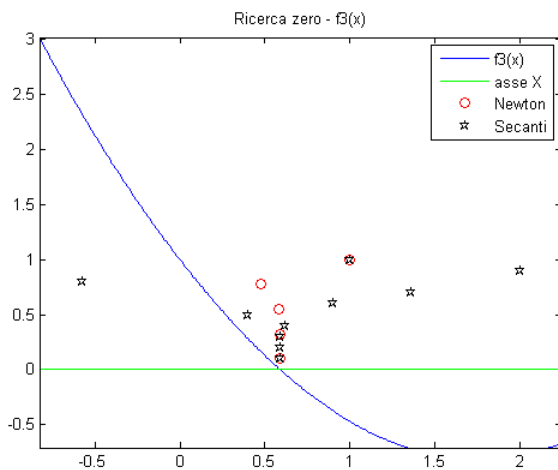
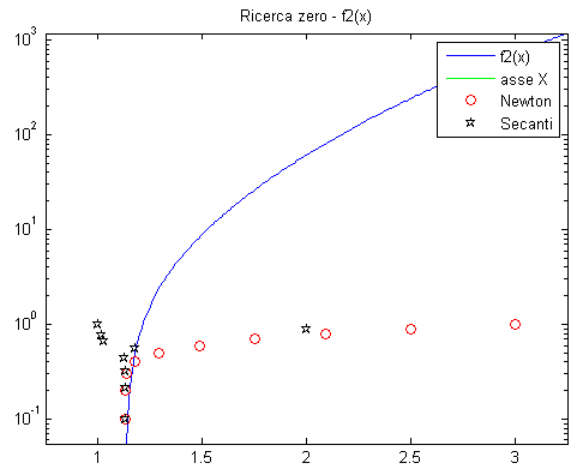
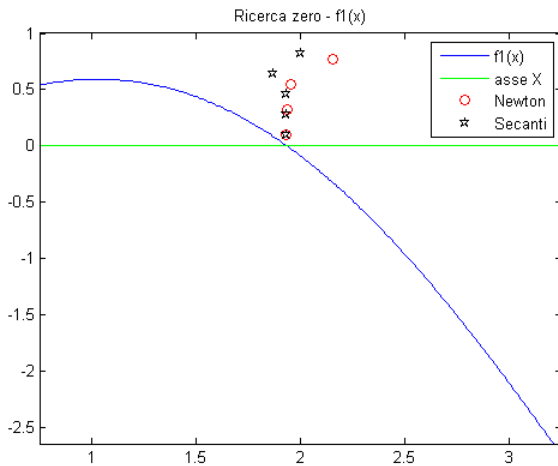
$c = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ Quindi numero molto elevato di iterazioni perchè $\phi'(\alpha) \cong -1$ notare relazione tra coefficiente angolare e numero di iterazioni x_0 uguale per tutti.

Ho scelto: $x_0 = \sqrt{5} + \frac{1}{10}$ (ricorda che $\sqrt{5} \cong 2.2361$).

Punto fisso	#step	derivata in sqrt(5)
2.3304	31.0000	-1.0000
2.2361	31.0000	-0.7764

(Scheda 9 parte 1 - Es 2)

I marker per Newton e secanti sono disposti così che al primo in alto corrisponda il primo valore della successione. $f_1(x) = \sin(x) - x^2/4$, $f_2(x) = x^6 - x - 1$ e $f_3(x) = e^{-x} - \sin(x)$. Confrontare tangente con secante.



2.2361	23.0000	-0.5528
2.2361	13.0000	-0.3292
2.2361	8.0000	-0.1056
2.2361	8.0000	0.1181
2.2361	13.0000	0.3417

Es 8

Il valore della derivata nella radice fa' sì che il metodo diverga. Inutile moltiplicare la funzione per una costante c , come fatto nell'esercizio precedente: la derivata sarà comunque infinita in un intorno della radice.

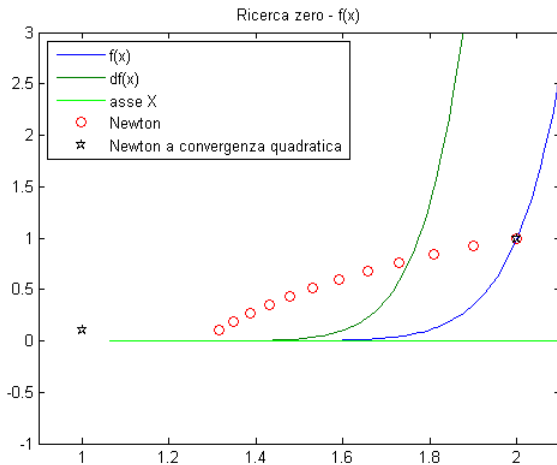
Scheda 9 - parte 2

Es 1

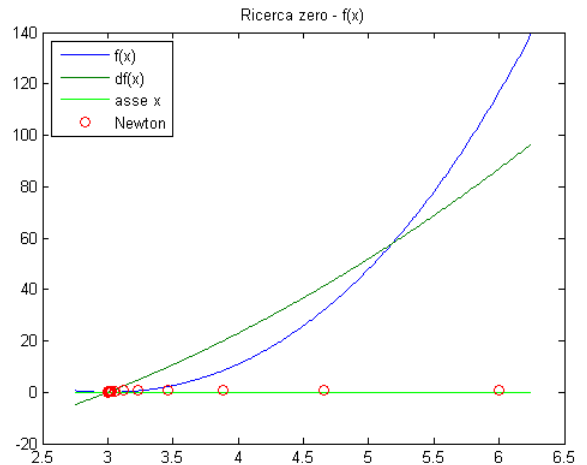
Il punto iniziale influisce sul numero di iterazioni necessarie alla convergenza.

Newton: tolleranza su f_x raggiunta $f(x(k)) = 0$ #iter = 5

$x =$
0.4864



(Es 4)



(Es 5)

-0.2337

Vettore delle iterate =

0	0.5000	0.4865	0.4864	0.4864
0	-0.2500	-0.2338	-0.2337	-0.2337

Newton:tolleranza su fx raggiunta $f(x(k)) = 1.1102e-016$ #iter = 7

x =

0.4864

-0.2337

Vettore delle iterate =

10.0000	-4.7488	-0.4926	0.5193	0.4865	0.4864	0.4864
10.0000	-5.9156	-0.5770	-0.2094	-0.2339	-0.2337	-0.2337

Es 2

All'aumentare del numero di step nei quali non viene valutato lo Jacobiano, aumenta il numero di iterazioni necessarie.

Newton, valutaz. Jacobiano ogni 4 step: tolleranza su fx raggiunta $f(x(k)) = 5.1567e-010$

x = #iter =

1.9319	8
0.5176	

Newton, valutaz. Jacobiano ogni 10 step:

tolleranza su fx raggiunta $f(x(k)) = 6.0115e-010$

x = #iter =

1.9319	12
0.5176	

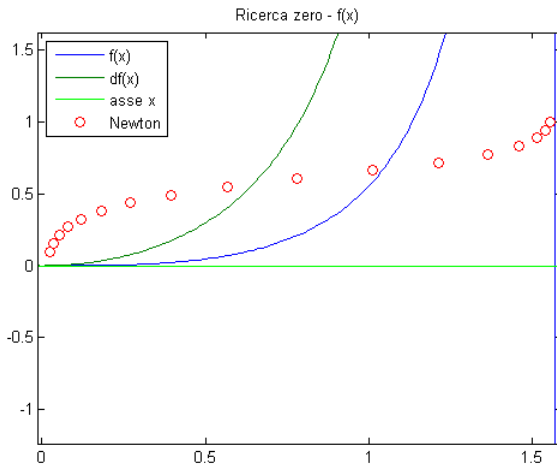
Es 3

La scelta del parametro δ influisce sul numero di iterazioni, poichè valori troppo piccoli portano ad errori di approssimazione nel calcolo dello jacobiano (di conseguenza aumenta numero iterazioni).

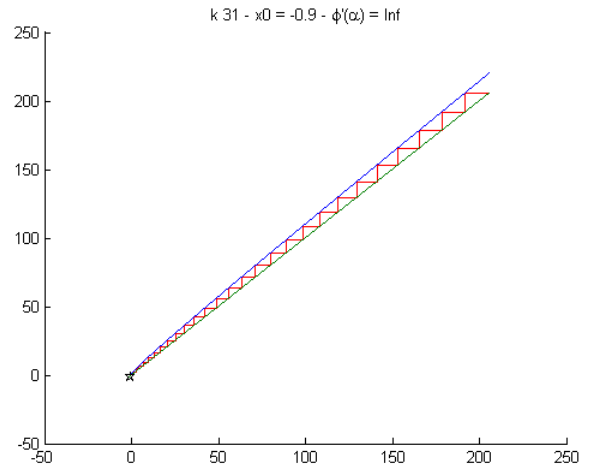
Newton NLJA,Jacobiano 10 step, delta = eps : maxIter!

x = #iter =

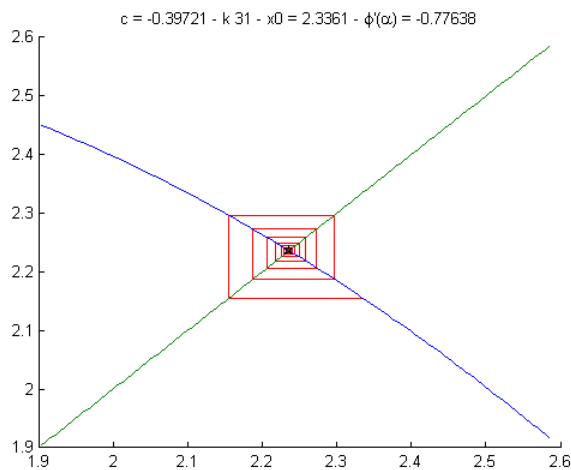
1.9319	31
0.5176	



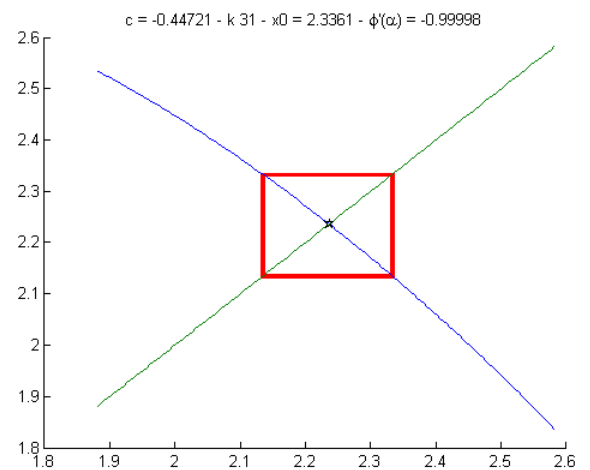
(Es 6)



(Es 8) Il metodo del punto fisso non converge.



(Es 7) Convergenza del metodo del punto fisso

(Es 7) $\phi'(\alpha) \cong 1$ Arresto per raggiunto numero massime iterazioni.

Newton NLJA, Jacobiano 10 step, delta = 1e-08 :

tolleranza su fx raggiunta $f(x(k)) = 2.4756e-010$

x = #iter =
1.9319 12
0.5176

Newton, Jacobiano 10 step: tolleranza su fx raggiunta $f(x(k)) = 2.4751e-010$

x = #iter =
1.9319 12
0.5176

Scheda 10

Es 1

I polinomi sono simmetrici rispetto all'asse passante per il nodo centrale. I polinomi esplodono al di fuori dell'intervallo di interpolazione.

I polinomi caratteristici con nodi di Chebyshev sono 'più limitati' dei polinomi su nodi equispaziati.

Es 5

$\lambda_n(X) = \|\sum_{i=1}^n |L_i|\|_\infty$ con L_i polinomio di Lagrange associato al nodo i -esimo.

il valore della costante di Lebesgue cresce al crescere del grado per i nodi equispaziati, rimane più limitata (pur crescendo) nel caso di nodi di Chebyshev.

n	Cost nodi equisp	Cost nodi Chebyshev
5	2.207824e+000	5.171530e+000
10	1.784860e+001	1.018298e+001
15	2.832107e+002	1.518053e+001
20	5.889584e+003	2.018202e+001
22	2.057621e+004	2.218196e+001

Es 6

Il polinomio interpolante i dati variati è incontrollato in prossimità degli estremi di integrazione.

Utilizzando i nodi di Chebyshev si limita notevolmente l'errore sui polinomi, la costante di Lebesgue è piccola.

Errori relativi troppo elevati causa annullarsi del denominatore ? questi dati sono significativi?? Non considero il primo termine perchè $\sin(-2\pi) = 0$ in algebra esatta, non in questo caso.

```
Errore sui dati    0.0020593
Errore polinomio su dati esatti  1.621e-005
Errore polinomio su dati variati   29.1772
```

Costante di Lebesgue 2.413387e+004

Es 7

Funzione di Runge : cfr appunti

$\sinh(x)$: siamo in un intorno di zero e possiamo effettuare con successo una approssimazione della funzione con il suo polinomio di Taylor troncato ad un certo n .

III funzione: il picco non viene rilevato correttamente dalla distribuzione dei nodi sull'asse x . In ogni caso con i nodi di Chebyshev migliore approssimazione (si evita il comportamento selvaggio del polinomio interpolante).

Es 8

...vedere figura...

Es 9

...vedere figure...

Scheda 11

Es 1

T(L)	-42°	+42°
n=1	3.426286	3.457670
n=2	3.532563	3.453598

Es 3

...vedere figure...

Scheda 12

Per $f(x) = e^{\sqrt{x}} \sin(x) + 2x - 4$:

Tol	Numero di iterazioni	
	Trapezi	Simpson adattativa
0.100	57	473
0.025	85	935
0.006	129	1867
0.002	201	3729

Nei grafici si nota come la quadratura con formula di Simpson adattativa esegua più ricorsioni negli intervalli dove la curvatura della funzione è maggiore.

Scheda 13

Es 1

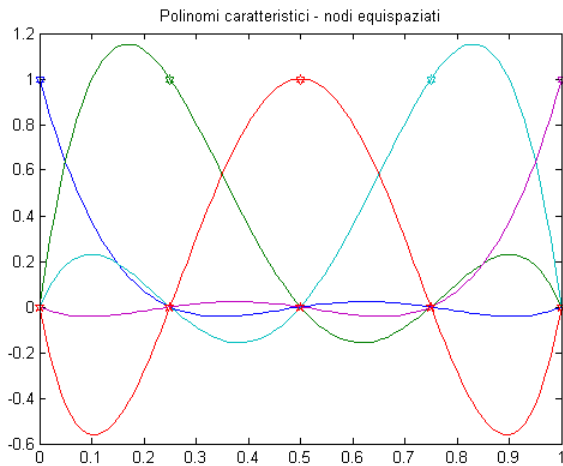
Es 2

Es 3

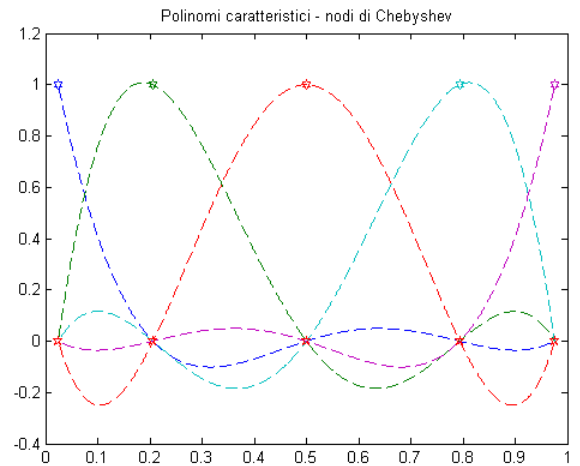
Es 4

Equazione di van der Pol

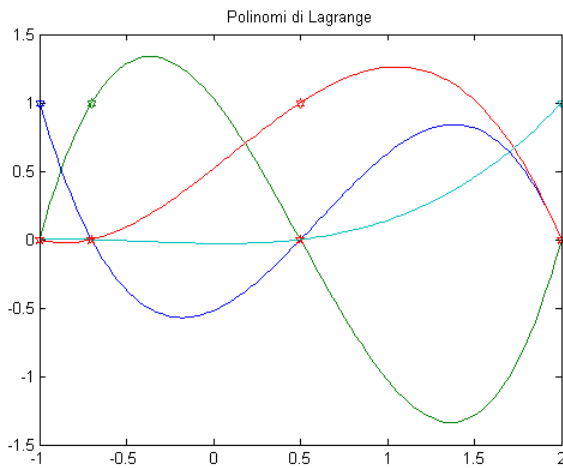
(Scheda 10 - Es 1,4)



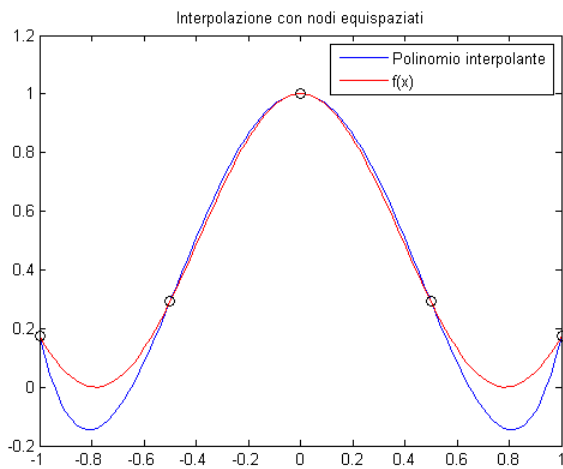
(Es 1)



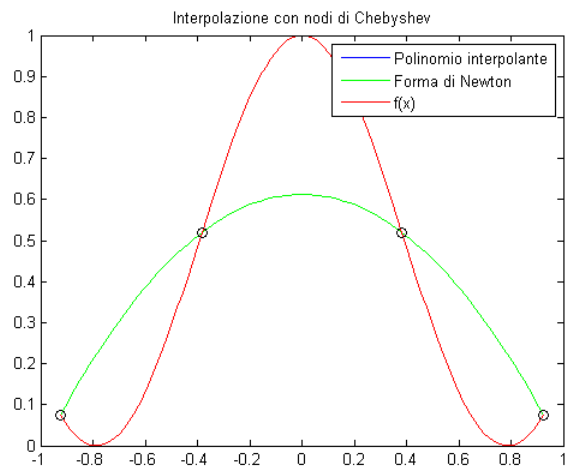
(Es 1)



(Es 1)

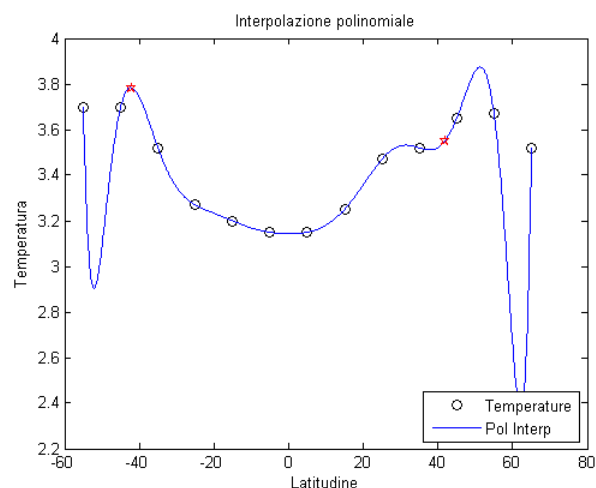
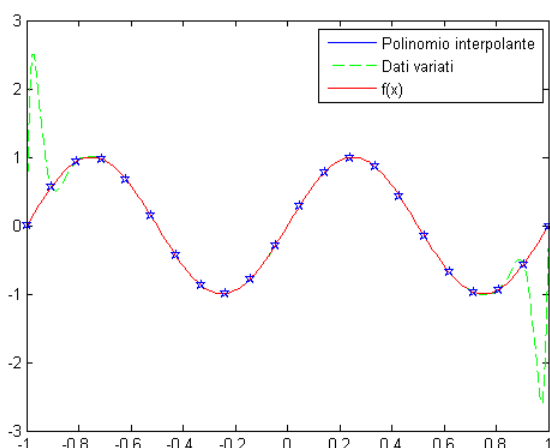


(Es 4)



(Es 4) Forma di Newton e polinomio interpolante coincidono!!

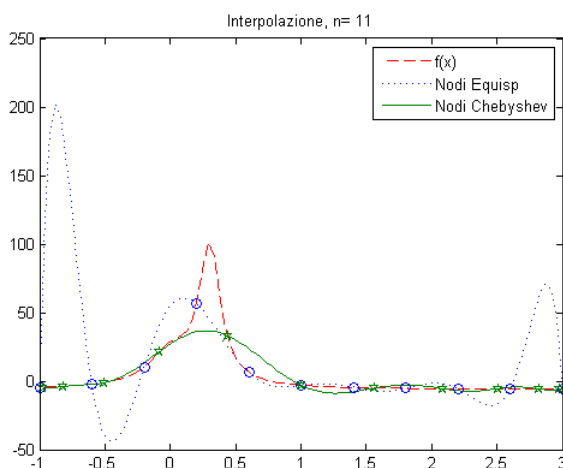
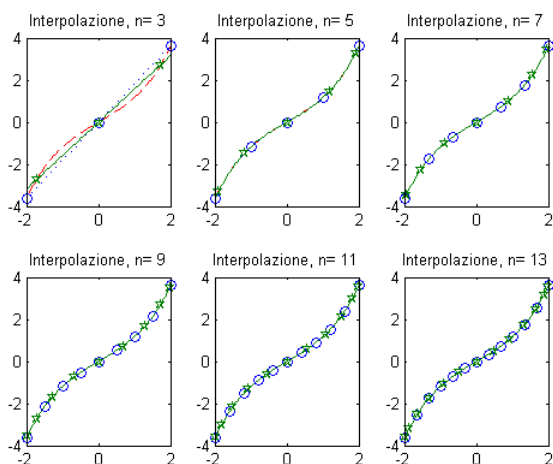
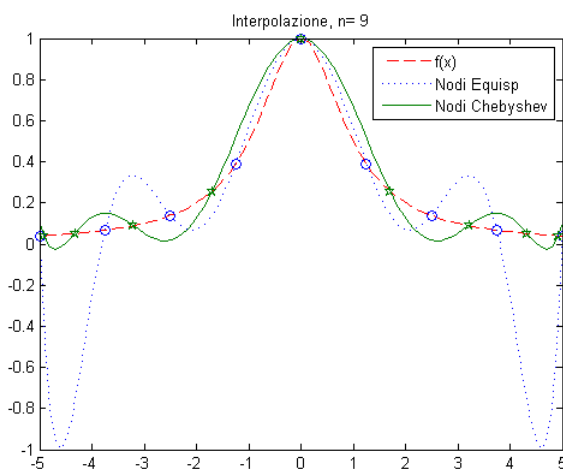
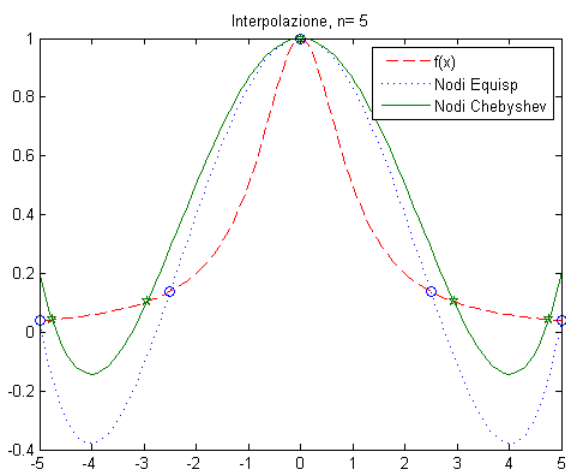
(Scheda 10 - Es 6,8)



Emergono i difetti dell'interpolazione polinomiale: il polinomio ha un comportamento non controllato negli intervalli prossimi agli estremi (i nodi sono equispaziati! Situazione naturale per dati sperimentali).

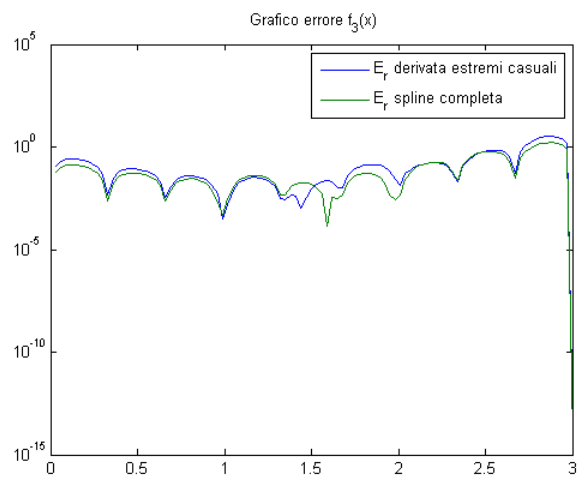
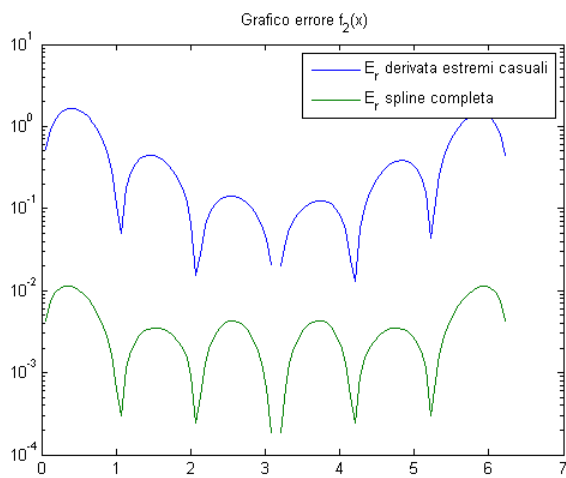
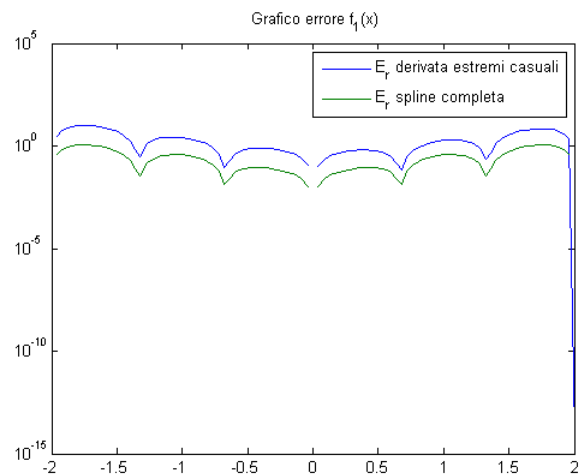
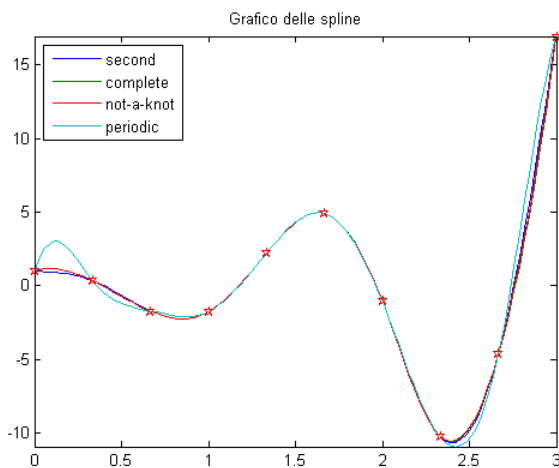
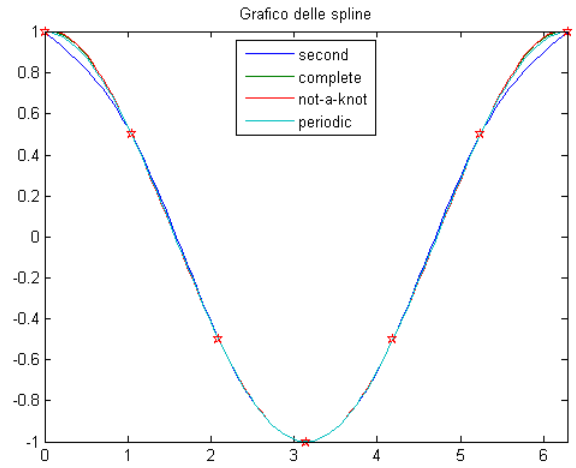
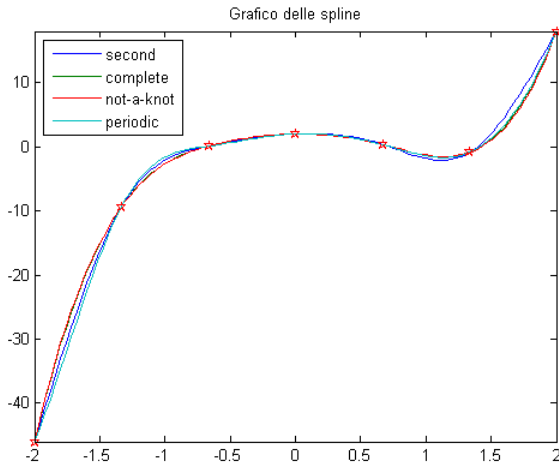
(Latitudine,Temperatura) \approx (-42,3.7837); (42, 3.5522)

(Scheda 10 - Es 7)



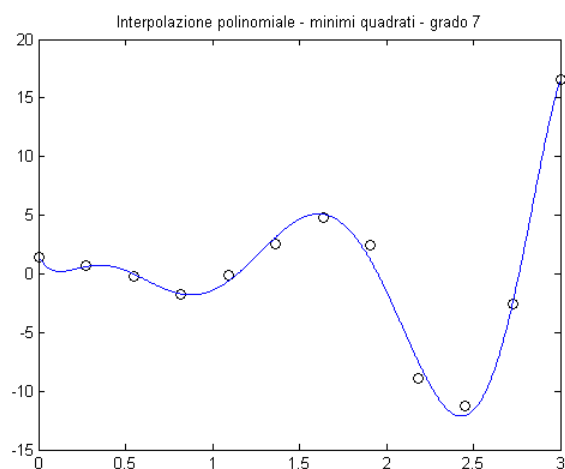
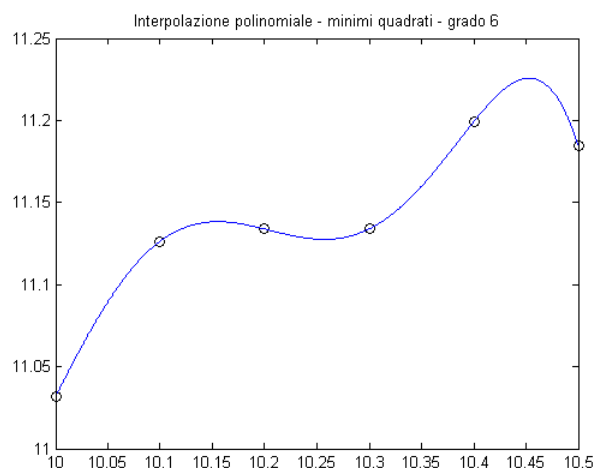
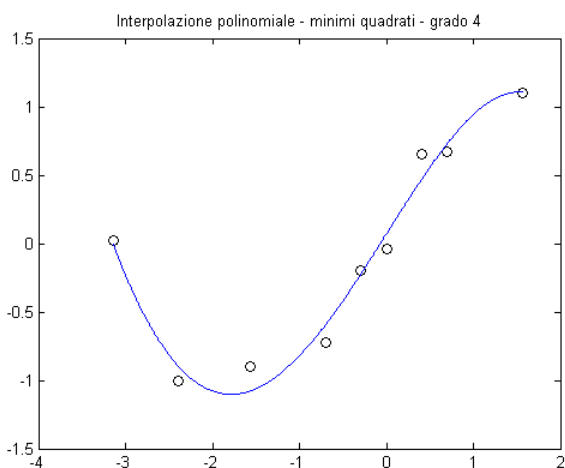
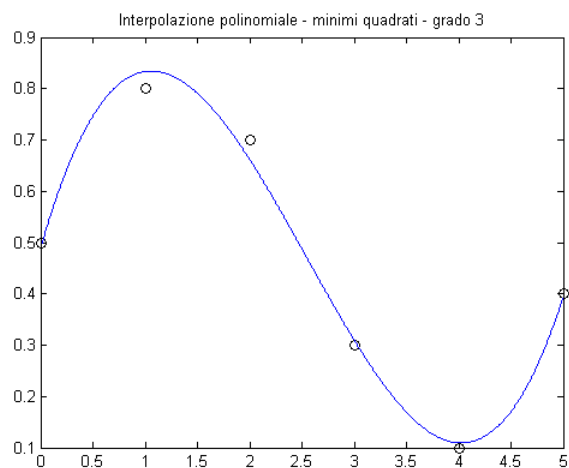
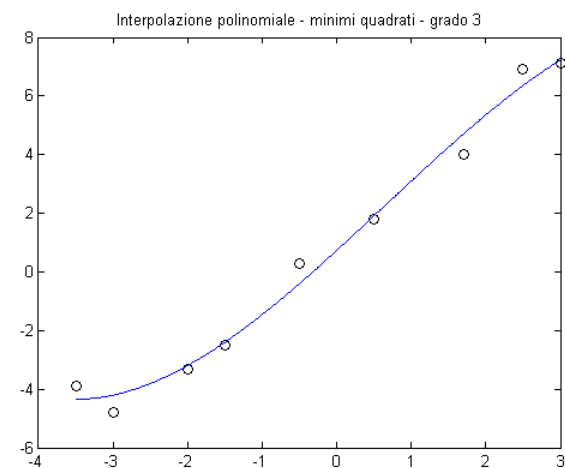
(Scheda 10 - Es 9)

Il valore della derivata generato casualmente è compreso tra 0 e 10.

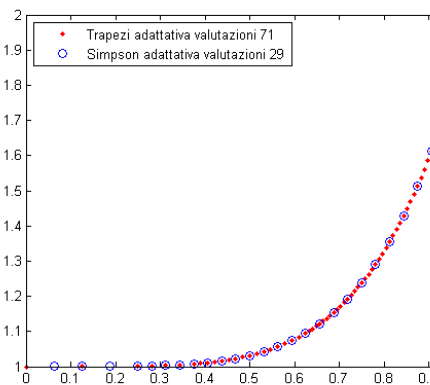


(Scheda 11 - Es 3)

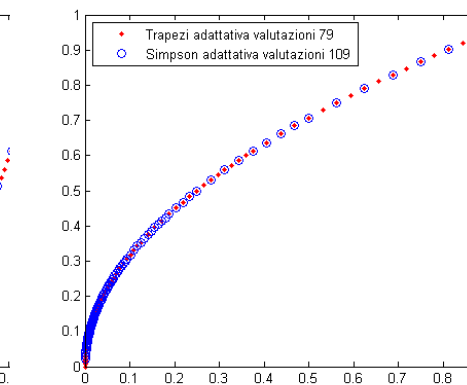
Il grado del polinomio è stato scelto in base al numero di dati da interpolare e al loro valore. Sono state eseguite delle prove di interpolazione con gradi diversi: se il grado è troppo basso, il polinomio non si mantiene sufficientemente vicino ai punti; se il grado è elevato, la distanza $y_0, p(x_0)$ è molto piccola ma il polinomio può esplodere in prossimità degli estremi (inoltre, questo non è più unico quando il grado è maggiore del numero di nodi).



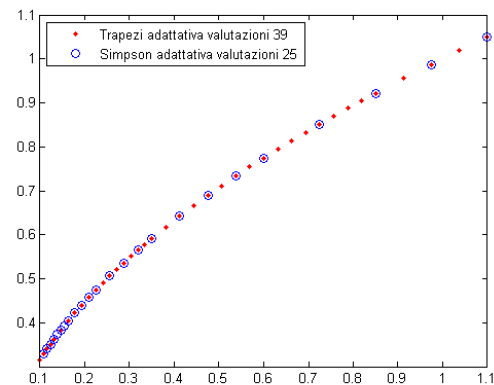
(Scheda 12 - Es tutti) I grafici mostrano i nodi di quadratura per la formula dei Trapezi e per Simpson adattativa. L'estimatore dell'errore per Simpson considera la derivata IV mentre Trapezi la derivata II.



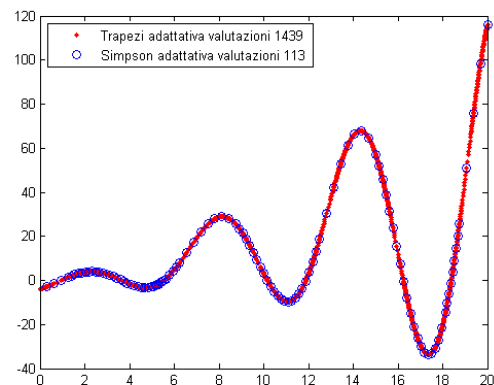
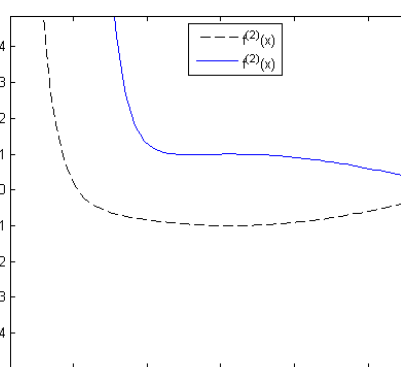
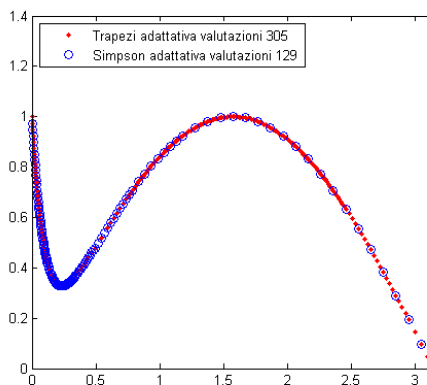
$f(x) = x^5 + 1$ Stima dell'errore migliore per Simpson rispetto a Trapezi dovuta ad una maggiore regolarità delle derivate interessate.



La stima dell'errore di Trapezi è migliore sull'intervallo $[0, 1]$: $f''(x) = \frac{-1}{4x^{3/2}}$ e $f^{(4)}(x) = \frac{-15}{16x^{7/2}}$.

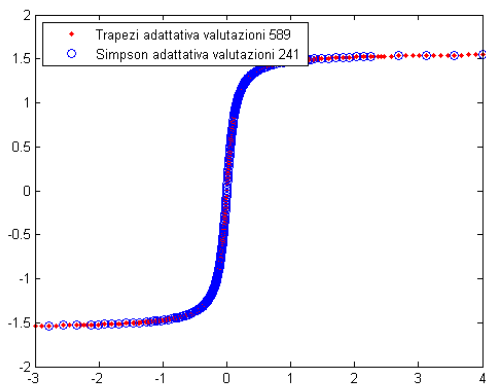


La stima dell'errore di Simpson è migliore sull'intervallo $[0.1, 1]$: ci allontaniamo dall'asintoto delle derivate.

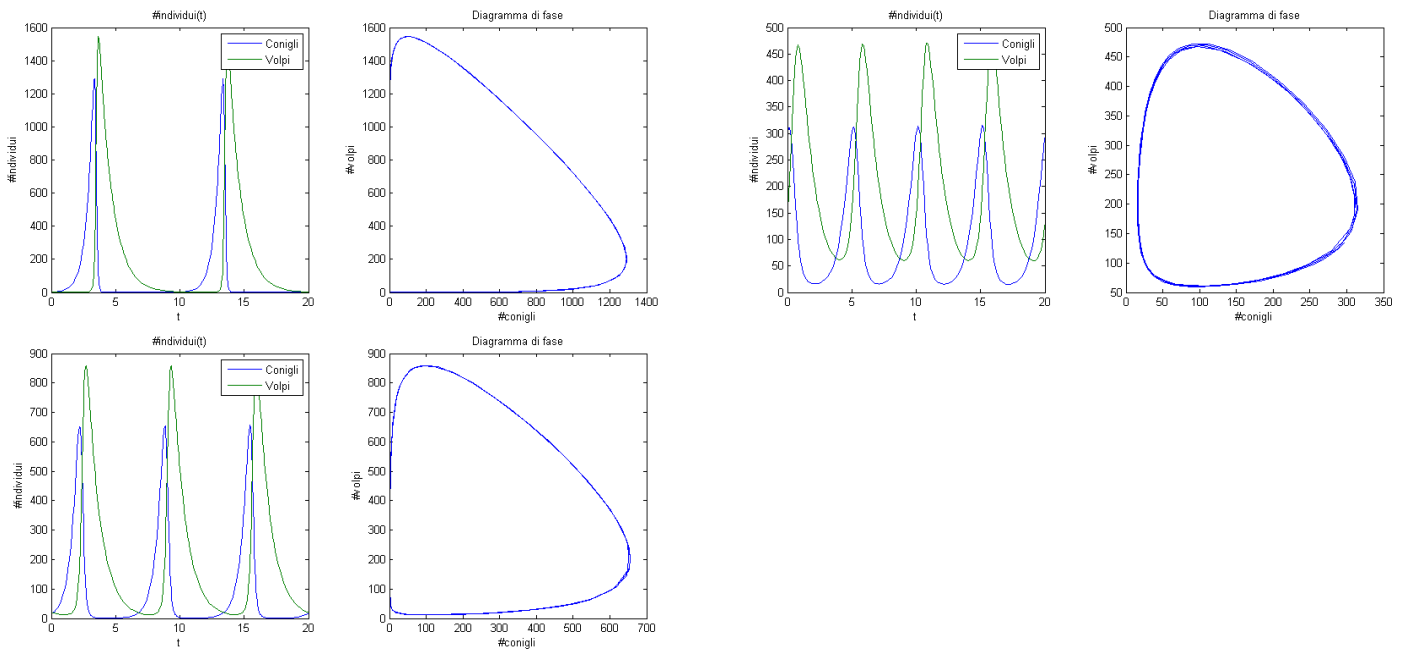


Si noti il valore delle derivate e la distanza dei nodi di integrazione per entrambe le formule.

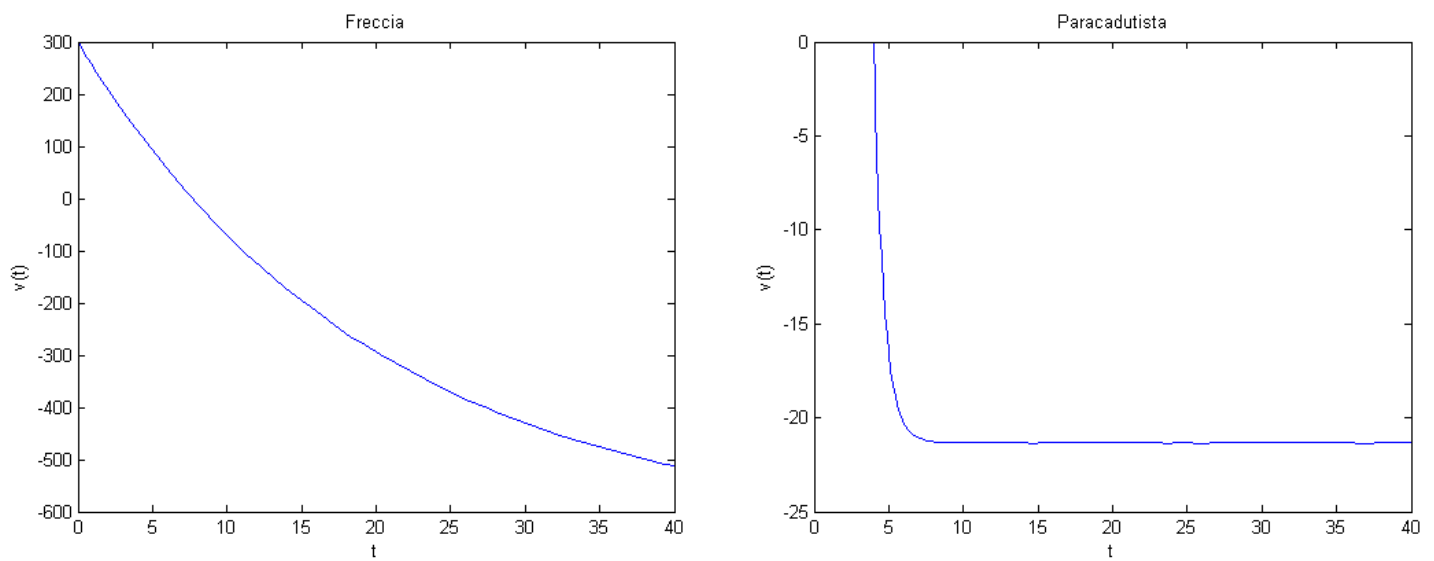
Grafico delle derivate della figura precedente.



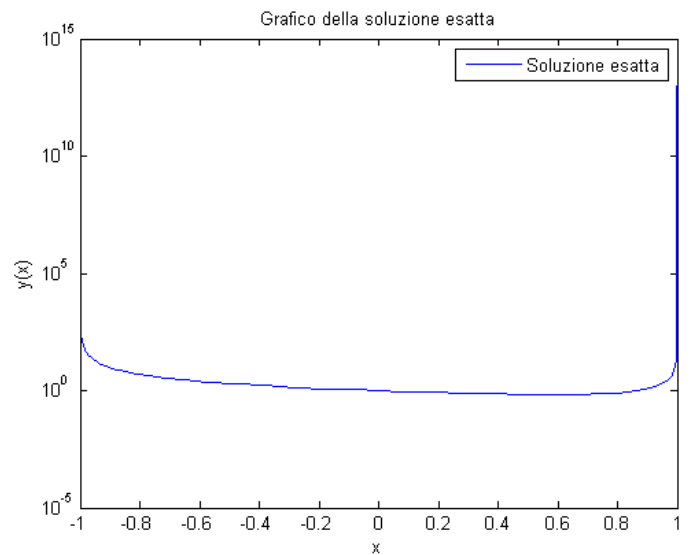
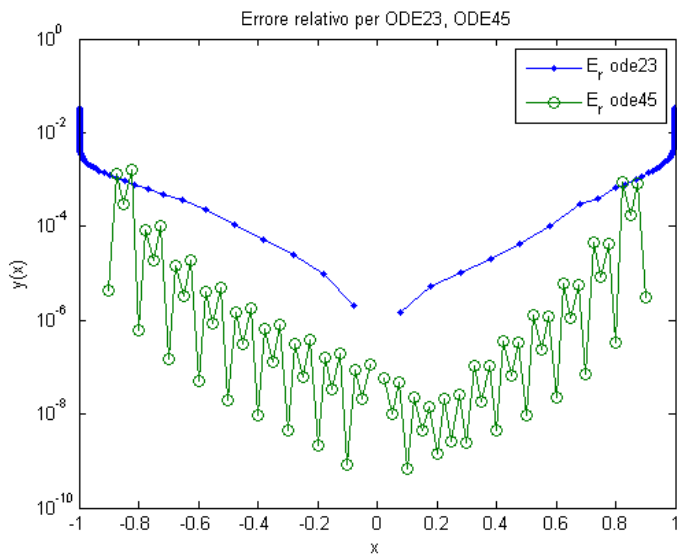
(Scheda 13 - Es 1) Modello di Volterra.



(Scheda 13 - Es 2) Corpo che cade.

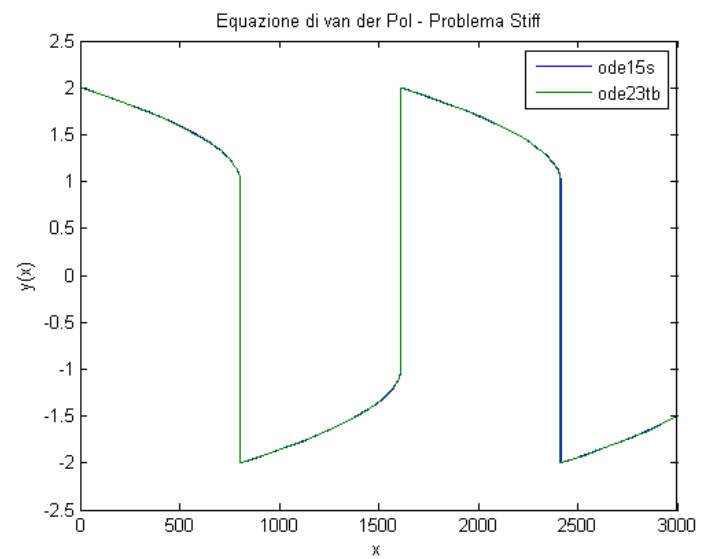
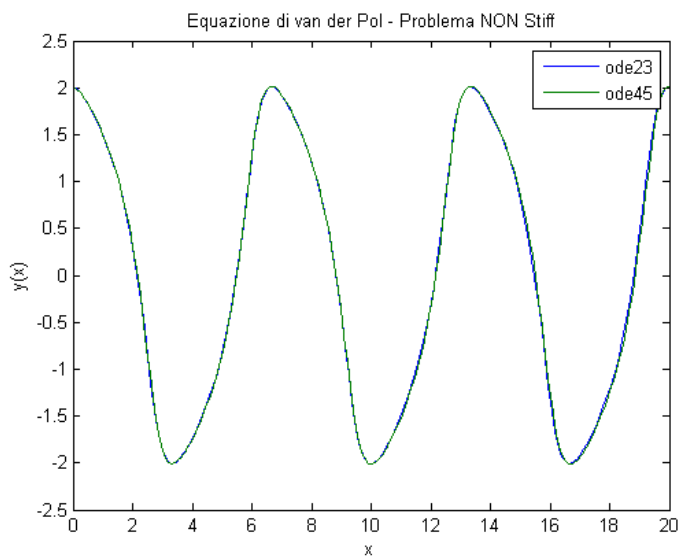
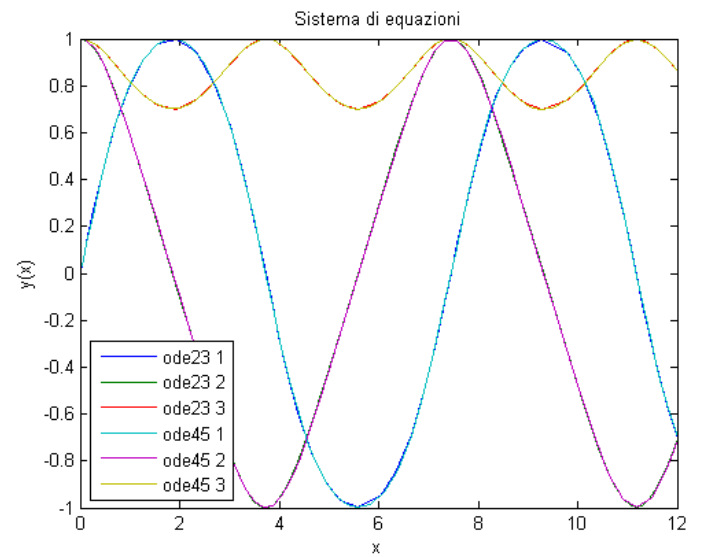
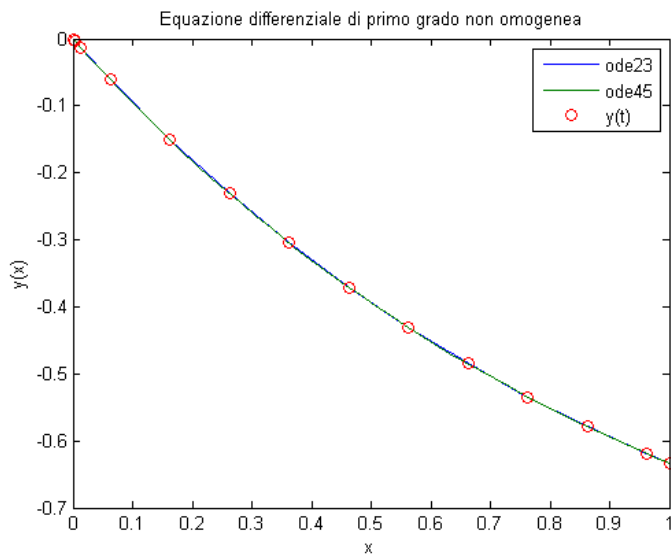


(Scheda 13 - Es 3) Scala logaritmica su asse y.



ode23 applica RK di II e III ordine mentre ode45 implementa RK di IV e V ordine. Si nota come in generale l'errore di ode45 sia minore rispetto a quello di ode23. Il comportamento oscillante di ode45 potrebbe essere causato dalle valutazioni ogni 4/5 step, si ha una sensibile riduzione dell'errore al 4° passo. L'errore aumenta in prossimità degli estremi di integrazione a causa degli asintoti verticali.

(Scheda 13 - Es 4)



Per grandi valori di μ il problema diventa stiff. ODE15S e ODE23TB risolvono bene questa equazione.